Τόλιας Α. → Θ.Ε.Μ.

Τριγωνομετρία !!!

ημ = ημίτονο = sinus = sin

συν = συνημίτονο = cosinus = cos

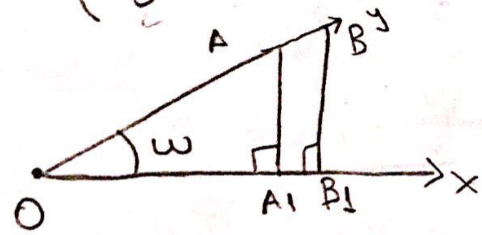
εφ = εφαπτομένη = tangent = tan

σφ = συνεφαπτομένη = cotangent = cot

$$\frac{\sin}{\cos} = \tan$$

$$\frac{\cos}{\sin} = \cot$$

(οξεία γωνία)



$$\frac{\text{απεναντη}}{\text{υποτ}} = \text{ημιτονο}$$

$$\frac{\text{προσκ.}}{\text{υποτ}} = \text{συνημιτονο}$$

Τα όμοια τρίγωνα $O\hat{A}A_1$, $O\hat{B}B_1$:

$$\rightarrow \frac{AA_1}{OA} = \frac{BB_1}{OB} = \frac{\text{απεναντι κάθετη}}{\text{υποτ.}} = \sin(\omega)$$

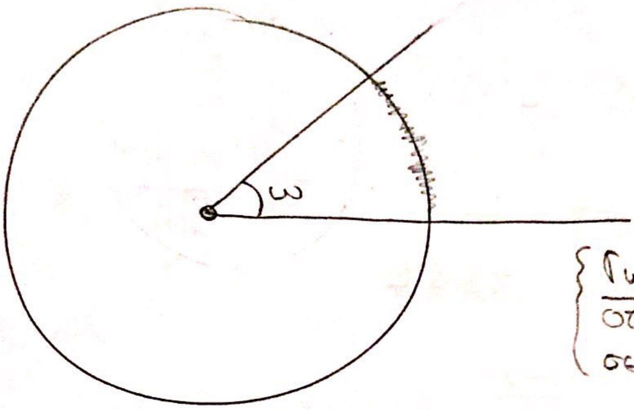
$$\rightarrow \frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = \frac{\text{προσκ κάθετη}}{\text{υποτ}} = \cos(\omega)$$

$$\rightarrow \frac{AA_1}{OA_1} = \frac{BB_1}{OB_1} = \frac{\text{απεναντ.}}{\text{προσκ.}} = \tan(\omega)$$

$$\rightarrow \frac{OA_1}{AA_1} = \frac{OB_1}{BB_1} = \frac{\text{προσκ}}{\text{απεναντ}} = \cot(\omega)$$

Scanned with CamScanner

Μέτρηση γωνιών (τόξο)



~~Μοίρες~~ κ' rad (ακτίνια)

Τόξο ενός rad είναι τόξο με μήκος όσο η ακτίνα του κύκλου.

Αντίστοιχα:

Γωνία ενός rad είναι γωνία που όταν γίνει επίκεντρη αντιστοιχεί σε τόξο ενός rad

Πως σχετίζονται μοίρες με rad;

Γωνία 2π rad είναι 360 μοιρών

Γωνία 1 rad είναι $\frac{360}{2\pi}$ μοιρών

Άρα Γωνία α rad είναι $\frac{360}{2\pi}\alpha$ μοιρών

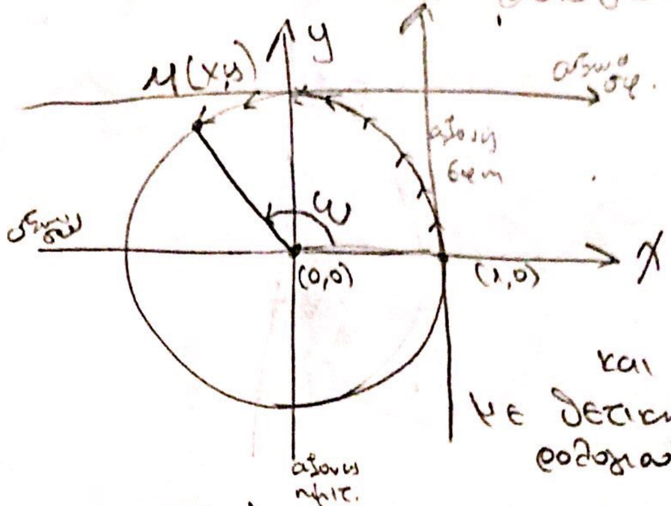
Γωνία α rad και μ μοιρών

Άρα $\boxed{\mu = \frac{360}{2\pi} \cdot \alpha \text{ μοιρών.}}$ ή $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$

μοίρες	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
rad	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\frac{\pi}{2}$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

μοίρες	rad	sin x	cos x	tan	cot
0	0	0	1	0	-
30	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
60	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
90	$\pi/2$	1	0	-	0

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί (γωνία για όλες)



→ Θεωρούμε κύκλο κέντρου (0,0) και ακτίνας 1

Ξεκινώντας από το σημείο (1,0) και κινούμενοι κατά μήκος του κύκλου με θετική φορά (αντίθετη των δεικτών του ρολογιού).

$$\cos(\omega) = \frac{\text{τετμημένη του } M}{\text{ακτίνα}} = x$$

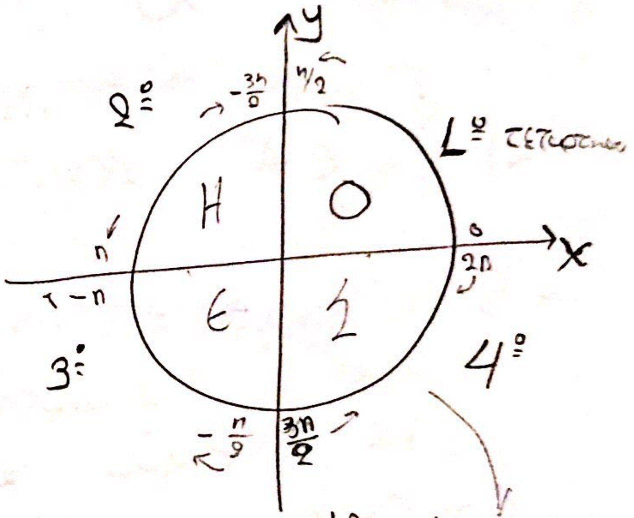
$$\sin(\omega) = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{ακτίνα}} = y$$

$$\tan(\omega) = \frac{y}{x} \quad (\text{ορίζεται για } x \neq 0)$$

$$\cot(\omega) = \frac{x}{y} \quad (\text{ορίζεται για } y \neq 0)$$

Βασικές ιδιότητες

- $-1 \leq \sin(\omega) \leq 1$
- $-1 \leq \cos(\omega) \leq 1$
- $\cos^2(\omega) + \sin^2(\omega) = 1$



1°: ΟΛΑ +
2°: sin(ω) ημίτονο +
3°: tan η εφαπτομένη +
4°: cos συνημίτονο +

$x+2\pi$
$$\begin{cases} \sin(x+2\pi) = \sin x \\ \cos(x+2\pi) = \cos x \\ \tan(x+2\pi) = \tan x \\ \cot(x+2\pi) = \cot x \end{cases}$$

$-x$
$$\begin{cases} \sin(-x) = -\sin x \\ \cos(-x) = \cos x \\ \tan(-x) = -\tan x \\ \cot(-x) = -\cot x \end{cases}$$

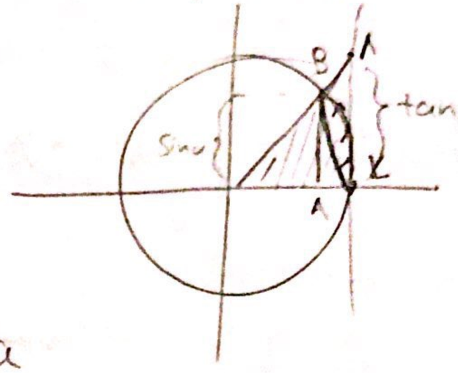
$\frac{\pi}{2}-x$
$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x \\ \cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x \\ \tan(\frac{\pi}{2}-x) = \cot x \\ \cot(\frac{\pi}{2}-x) = \tan x \end{cases}$$

Παραπληρωματικές γωνίες
$$\begin{cases} \sin(\pi-x) = \sin(x) \\ \cos(\pi-x) = -\cos(x) \\ \tan(\pi-x) = -\tan(x) \\ \cot(\pi-x) = -\cot(x) \end{cases}$$

$\pi+x$ $\begin{cases} \sin(\pi+x) = -\sin(x) \\ \cos(\pi+x) = -\cos(x) \\ \tan(\pi+x) = \tan(x) \\ \cot(\pi+x) = \cot(x) \end{cases}$

$\rightarrow 0 < a < \pi/2:$
$\sin a < a < \tan a$

$\rightarrow$ Εμβ(ΟΒΚ) < Εμβ κυκλ. τομ. $\overset{\frown}{OKB}$ < Εμβ(ΟΛ) ①



$\leftarrow \frac{a}{2}$ Εμβ($O\overset{\frown}{KB}$)

Εμβ κυκλ. δισκου $= \pi \cdot \rho^2$

Εμβ(ΟΒΚ) $= \frac{OK \cdot AB}{2} = \frac{\sin a}{2}$

① $\frac{\sin a}{2} < \frac{a}{2} \Rightarrow \sin a < a$

Ορισμός:

Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ μια συναρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ αν υπαρχει $T > 0$

(α) $\forall x \in \mathbb{R}$ $x \in A \Leftrightarrow x + T \in A$

(β) $\forall x \in A \rightarrow f(x+T) = f(x)$

$\rightarrow \sin(x+2\pi) = \sin x$

αρα η συναρτηση "ημιτονο" ειναι περιοδικη με περιοδο 2π.

$\rightarrow \cos(x+2\pi) = \cos x$

ομοιως η συναρτηση "συνημιτονο" ειναι περιοδικη με περιοδο 2π.

$\rightarrow \tan(x+\pi) = \tan x$

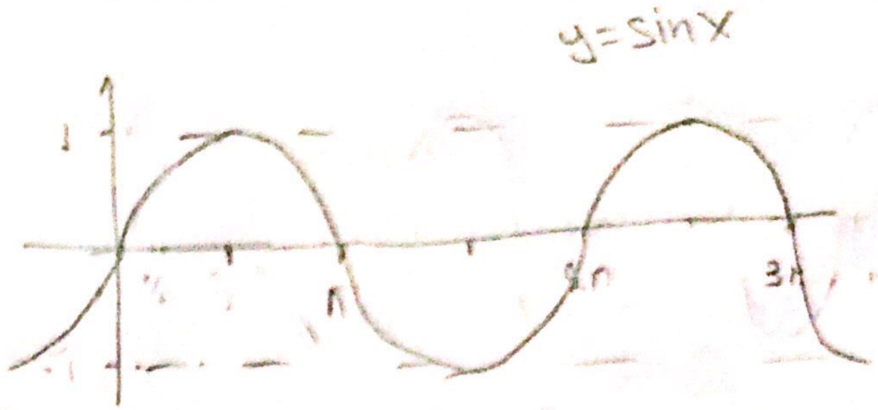
η συναρτηση "εφαπτομενη" ειναι περιοδικη με περιοδο π

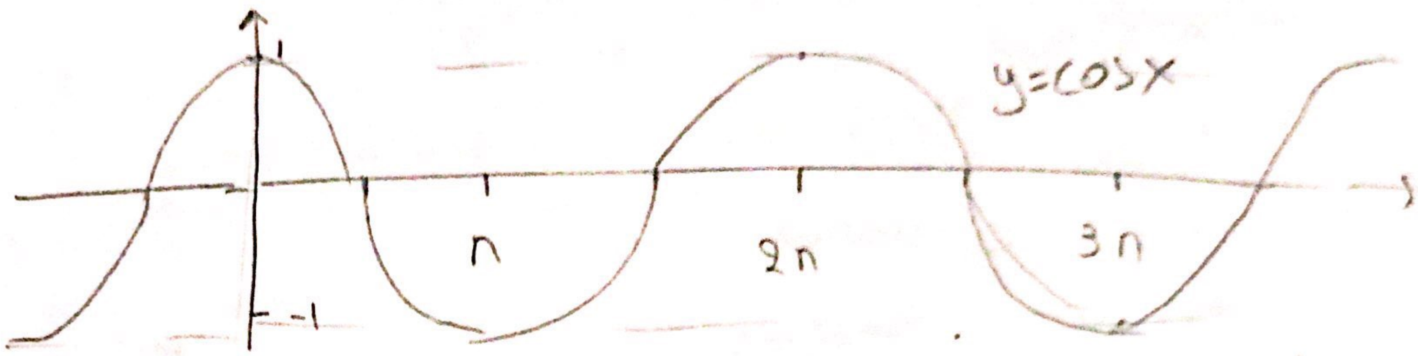
$\rightarrow \cot(x+\pi) = \cot x$

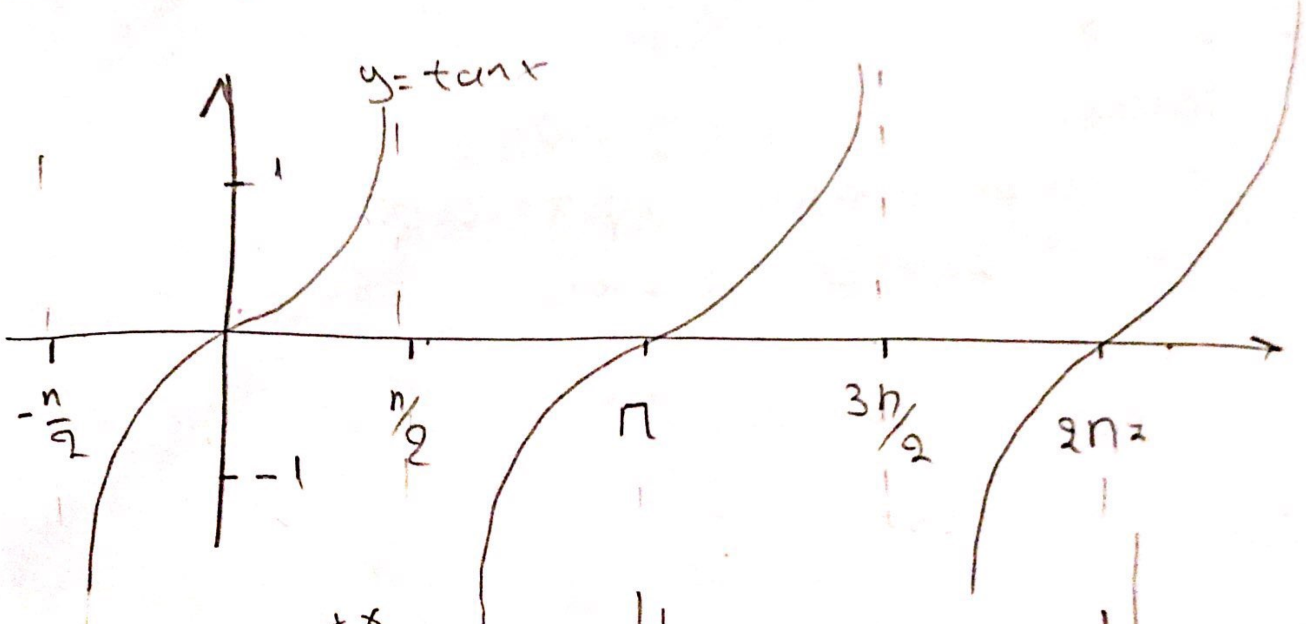
η συναρτηση "συνεφαπτομενη" ειναι περιοδικη με περιοδο π

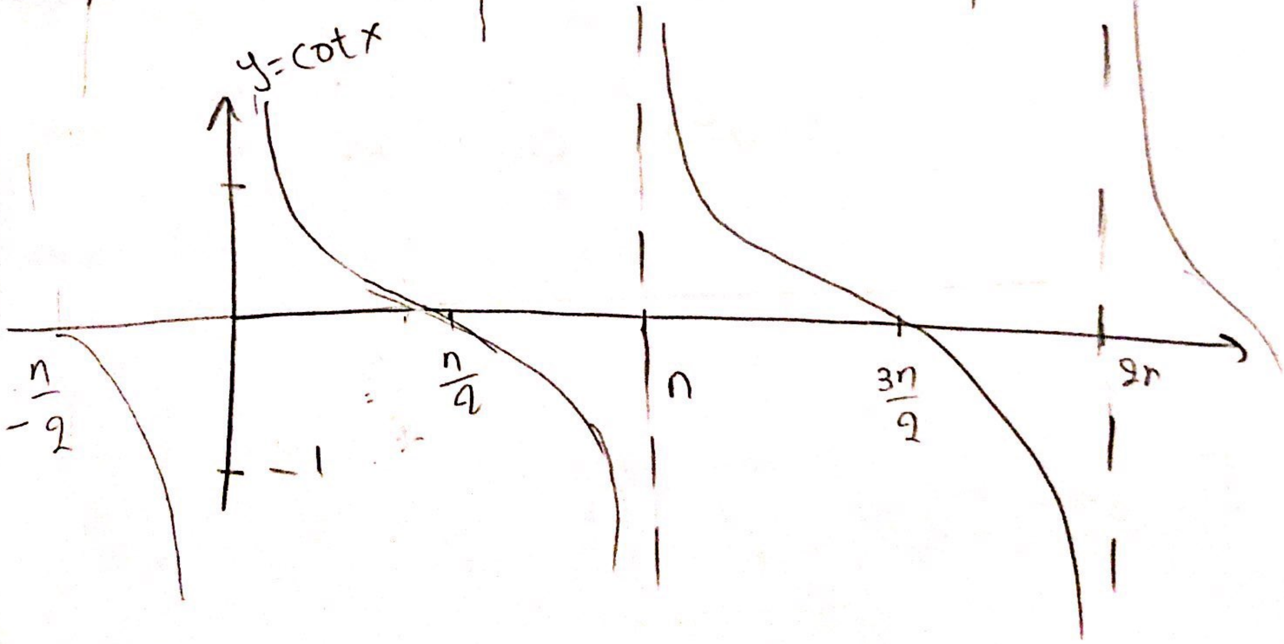
$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, f(x)),\ x \in \mathbb{R}$









Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

→ $\sin x = a$

1) Αν $a > 1$ ή $a < -1$ η εξίσωση είναι αδύνατη
2) Αν $a \in [-1, 1]$

Βρίσκουμε μια θ ώστε $\sin\theta = a$

η εξίσωση γράφεται $\sin x = \sin\theta$

$\Leftrightarrow \quad x = 2\kappa\pi + \theta, \ \kappa \in \mathbb{Z}$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - \theta, \ \kappa \in \mathbb{Z}$

→ $\cos x = a$

1) Αν $a > 1$ ή $a < -1$ η εξίσωση είναι αδύνατη
2) Αν $a \in [-1, 1]$

Βρίσκουμε μια θ ώστε $\cos\theta = a$

η εξίσωση γράφεται $\cos x = \cos\theta$

$\Leftrightarrow \quad x = 2\kappa\pi \pm \theta, \ \kappa \in \mathbb{Z}$